13/10/2015

Ερώτημα: Αλλάζει το μήκος κατόπιν αναπαραμετρησης;

Απαντηση:

$$L_a^b(c) = \int_a^b \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt,$$

• Έστω $\frac{df}{d\sigma} > 0$ στο $I \Rightarrow f \nearrow$ $a = f(\tilde{a})$ $b = f(\tilde{b}) \Rightarrow \tilde{a} < \tilde{b}$

$$L_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}(\tilde{c}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{d\tilde{c}}{d\sigma} \right\| d\sigma$$

Κανοντας αλλαγή μεταβλητής έχω:

$$\int_a^b \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{dc}{dt} \right\| \frac{dt}{d\sigma} \, d\sigma = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{df}{d\sigma} \cdot \frac{dc}{dt} \right\| d\sigma =$$

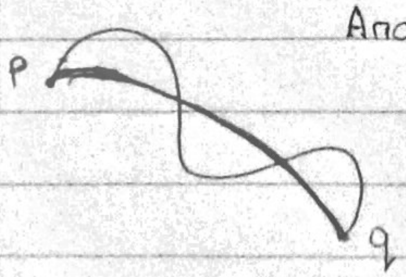
$$= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{d\tilde{c}}{d\sigma} \right\| d\sigma$$

• Όμοια και για $\frac{df}{d\sigma} < 0$.

Άρα η αναπαραμετρηση ΔΕΝ αλλάζει το μήκος.

Ερώτημα: Δίνονται τα σημεία $p \neq q \in \mathbb{R}^2$. Υπαρχει καμπύλη της οποίας το μηκος να είναι μικρότερο ή ισο απο το μηκος καμπύλης που ενώνει τα p, q? (Προβλημα ελαχιστοποιησης του μηκους).

Απαντηση:



Θεώρημα: Έστω $c:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ C^1 με $c(a)=p$, $c(b)=q$. Τοτε ισχυει: $L_a^b(c) \geq d(p,q)$. Επιπλεον η ισοτητα ισχυει οταν η εικόνα της c είναι το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει τα p, q.

Αποδειξη:

$d(p,q) = \|q-p\|$. Το $w = \dfrac{q-p}{\|q-p\|}$ ειναι μοναδιαιο.

$$\langle c'(t), w\rangle \leq |\langle c'(t), w\rangle| \leq \|c'(t)\|\,\|w\| = \|c'(t)\| \quad \forall t\in[a,b] \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \langle c'(t), w\rangle dt \leq \int_a^b |\langle c'(t), w\rangle| dt \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt = L_a^b(c)$$

$$\langle c(t), w\rangle' = \langle c'(t), w\rangle + \cancel{\langle c(t), w'\rangle}^{\,0}$$

Άρα,

$$\int_a^b \langle c'(t), w\rangle dt = \int_a^b \langle c(t), w\rangle' dt = \langle c(b), w\rangle - \langle c(a), w\rangle =$$

$$= \langle q-p, w\rangle = \langle q-p, \frac{q-p}{\|q-p\|}\rangle = \|q-p\| = \ell(p,q)$$

Εστω ότι $L_a^b(c) = d(p,q) \Rightarrow$ Εστω $(*)$ εχω ισότητα σε καθε σημα $\forall t \Rightarrow c'(t) = \lambda(t) w,\ \lambda(t)>0 \Rightarrow c([a,b])$ ευθεια (γιατι;;)

Κανονικες καμπύλες:

$c: I\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$ κανονική δηλ. $c'(t) \neq (0,0)\ \forall t\in I$

Θεωρώ τη συναρτηση $s: I \to \mathbb{R}$ με $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma$

την οποία καλουμε μηκος τοξου της c με αφετηρια το t_0.

$$\tilde{s}(t) = \int_{t_1}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma = \int_{t_1}^{t_0} \|c'(\sigma)\| d\sigma + \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma \Rightarrow \boxed{\tilde{s} = s + \sigma\tau\alpha\theta}$$

Η s ειναι παραγωγισιμη με $\dfrac{ds(t)}{dt} = \|c'(t)\|$.

Αν η c ειναι κανονική $\Rightarrow \dfrac{ds}{dt} > 0$ Παντου. $\Rightarrow s = s(t) \nearrow \xrightarrow{\text{αντιστρεφεται}}$

$$\Rightarrow t = t(s) = f(s) \nearrow, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|\dot{s}\|} > 0, \quad \frac{df}{ds} > 0.$$

Η $\tilde{c} = c \circ f$ ειναι κανονική καλειται αναπαραμετρηση της c με το μηκος τοξου. $\tilde{c}(s) = c(f(s)) = c(t(s))$

ΣΥΜΒΑΣΗ: Γραφουμε απλα $\tilde{c} = c$.

Η αναπαραμετρηση με το μηκος τοξου (φυσική παραμ) έχει διανυσμα ταχύτητας.

$$\frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dc}{ds} = \frac{c'}{\|c'\|}}$$ είναι μοναδιαίο.

Αντίστροφα:

Εστω $c(t)$ καμπύλη με διανυσμα ταχύτητας μοναδιαίο δηλ.
$\|c'(t)\| = 1 \ \forall t$, $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma = \int_{t_0}^{t} d\sigma \Rightarrow \boxed{s = t - t_0}$

Συμπεράσματα:

① Καθε κανονική καμπύλη μπορεί να αναπαραμετρηθεί με παραμετρο το μηκος τοξου.

② Μια καμπύλη εχει παράμετρο το μηκος τόξου αν_ν το διανυσμα ταχύτητας είναι παντου μοναδιαίο.

Παραδειγμα: Θεωρώ την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$
$r > 0$, $c'(t) = (-r\sin t, r\cos t) \neq (0,0) \Rightarrow$ κανονική $\|c'(t)\| = r$.
Το μηκος τοξου με αφετηρία $t_0 = 0$ είναι η συναρτηση

$$s = s(t) = \int_0^t \|c'(\sigma)\| d\sigma = \int_0^t r\, d\sigma \Rightarrow \boxed{s = s(t) = rt}$$

$\Longleftrightarrow \boxed{t = \frac{s}{r}}$. Η αναπαραμετρηση της c με φυσικη παραμετρο είναι η καμπυλη $c(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

$$\frac{dc(s)}{ds} = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right)$$

παραδειγμα: Θεωρω την καμπυλη $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $a,b>0$, $t\in\mathbb{R}$.
με διανυσμα ταχυτητας $c'(t) = (-a\sin t, b\cos t) \neq (0,0)$

Το μηκος τοξου με αφετηρια $t_0 = 0$ ειναι η συναρτηση:

$$s = s(t) = \int_0^t \|c'(\sigma)\| d\sigma = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma}\, d\sigma$$

δεν μπορω να βρω το ολοκλ.

→ Δεν μπορουμε παντα να υπολογισουμε το μηκος τοξου.

Έστω $\tilde{c} = T\circ c$ γεωμ. ισοτιμη με $c: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$.

$\tilde{c}' = Ac'$ $\quad T = T_v \circ A$

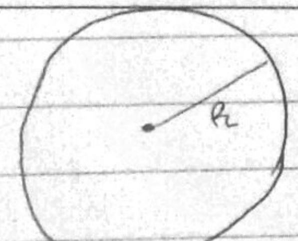
$\|\tilde{c}'\| = \|Ac'\| = \|c'\|$

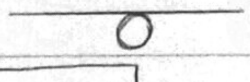
$\boxed{\text{ΣΥΜΒΑΣΗ}}$:

Για καμπύλες με παραμετρο μηκος τοξου συμβολιζουμε $\dot{c} = \frac{dc}{ds}$, $\ddot{c} = \frac{d^2c}{ds}$...

Καμπυλότητα καμπυλων του $\mathbb{R}^2$:

(Η καμπυλοτητα της ευθειας ειναι $k = 0$)





$\boxed{k = 1/R}$

Όσο μεγαλωνει ο κυκλος τοσο μικραινει η καμπυλοτητα.
Άρα η καμπυλοτητα ειναι αντιστρόφως αναλογη της ακτινας του κυκλου

Καμπυλότητα για καμπύλες με φυσική παραμετρο:

Εστω $c: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ καμπύλη με φυσική παραμετρο s, δηλ $c(s) = (x(s), y(s))$
$s\in I$. $\|\dot{c}(s)\| = 1\ \forall s$ $\quad \dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

Η καμπυλότητα της c ειναι η συναρτηση $k: I\to\mathbb{R}$: $k(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s)$